BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК - 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

yashar_aze@mail.ru

В работе исследована одна обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение

Для уравнения

$$u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ рассмотрим обратную краевую задачу при условиях:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,T)=\psi(x) \quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

$$u(0,t)=0, u_x(1,t)=0 \ \ (0\le t\le T), \tag{3}$$

$$u(1,t)=h(t) \quad (0\le t\le T), \tag{4}$$

где $f(x,t),\varphi(x),\psi(x),h(t)$-заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$- искомые функции.

Определение. Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4) назовем пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;
3) все условия (1)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Для исследования задачи (1)-(4) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{5}$$

$$y(0) = 0, y'(T) = 0, \tag{6}$$

где $a(t) \in C[0,T]$-заданная функция, а $y = y(t)$-искомая функция, причем под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $y(t)$, непрерывную на $[0,T]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (5), и удовлетворяющую условиям (5),(6) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть функция $a(t) \in C[0,T]$ такая, что

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \le R = const.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}T^2R < 1. \tag{7}$$

Тогда задача (5), (6) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Нетрудно видеть, что задача

$$y''(t) = 0, y(0) = 0, y'(T) = 0 \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда известно [1], что задача (8) имеет одну функцию Грина и краевая задача (5),(6) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(t) = \int_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)d\tau \quad (0 \le t \le T), \tag{9}$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -t, & t \in [0,\tau], \\ -\tau, & t \in [\tau,T]. \end{cases} \tag{10}$$

Обозначив

$$Ay(t) = \int_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)d\tau \tag{11}$$

(9) запишем в виде

$$y(t) = A(y(t)). \tag{12}$$

Уравнение (12) будем изучать в пространстве $C[0,T]$.

Легко видеть, что оператор A является непрерывным в пространстве $C[0,T]$.

Покажем, что оператор A является в пространстве $C[0,T]$ сжимающим. Действительно, для любых $y(t), \overline{y}(t)$ из пространства $C[0,T]$ имеем:

$$\left\|A(y(t)) - A(\bar{y}(t))\right\|_{C[0,T]} \le \frac{1}{2}\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]} T^2 \left\|y(t) - \bar{y}(t)\right\|_{C[0,T]}. \quad (13)$$

Тогда, с учетом (8), из (13) следует, что оператор A является сжимающим в $C[0,T]$. Поэтому, в пространстве $C[0,T]$ оператор A имеет единственную неподвижную точку $y(t)$, которая является решением уравнения (12). Таким образом, интегральное уравнение (10) имеет в $C[0,T]$ единственное решение, следовательно, краевая задача (6), (7) также имеет в $C[0,T]$ единственное решение. Так как $y(t) = 0$ является решением краевой задачи (6), (7), то она имеет только одно тривиальное решение. Лемма доказана.

Наряду с обратной краевой задачей (1)-(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t), a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(4), из (1)-(3) и

$$h''(t) + u_{xx}(1,t) = a(t)h(t) + f(1,t) \ \ (0 \le t \le T). \quad (14)$$

Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1], h(t) \in C^2[0,T], h(t) \ne 0$ при $t \in [0,T]$, $f(x,t) \in C(D_T)$ и выполняются условия согласования

$$\varphi(1) = h(0), \ \psi(1) = h'(T). \quad (15)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(4) является и решением задачи (1)-(3), (14);
2. каждое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (14), такое, что

$$\frac{1}{2} T^2 \left\|a(t)\right\|_{C[0,T]} < 1, \quad (16)$$

является классическим решением (1)-(4).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(4). Из (4) видно, что

$$u_t(1,t) = h'(t), \ \ u_{tt}(1,t) = h''(t) \ \ (0 \le t \le T). \quad (17)$$

Далее, из (1) имеем:

$$u_{tt}(1,t) + u_{xx}(1,t) = a(t)u(1,t) + f(1,t) \ \ \ (0 \le t \le T). \quad (18)$$

Отсюда, с учетом (4) и (17), приходим к выполнению (14).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (14), причем выполнено условие (16). Тогда, из (14) и (18), получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(1,t)-h(t)) = a(t)(u(1,t)-h(t)) \quad (0 \le t \le T). \tag{19}$$

Далее, в силу (2) и условий согласования (15), имеем:

$$\begin{cases} u(1,0)-h(0) = \varphi(1)-h(0) = 0, \\ u_t(1,T)-h'(T) = \psi(1)-h'(T) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Из (19) и (20), в силу леммы 1, заключаем, что выполняется условие (4). Лемма доказана.

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(3), (14) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^{\alpha}$ [2], совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \ (\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\alpha} \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} < +\infty .$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}} = J_T(u).$$

2. Через E_T^{α} обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^{\alpha} \times C[0,T].$$

Норма элемента $z = \{u, a\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^{\alpha}} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^{\alpha}$ и E_T^{α} являются банаховыми пространствами.

Компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (14) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \ \ (\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)), \tag{21}$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, ...)$$

-дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0,T]$. Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u_k''(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t;a,u) \quad (k = 1,2,...;0 \le t \le T), \tag{22}$$

$$u_k(0) = \varphi_k,\ u_k'(T) = \psi_k \ (k = 1,2,...), \tag{23}$$

где

$$F_k(t;u,a) = f_k(t) + a(t)u_k(t),\ f_k(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx, \psi_k = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx \quad (k = 1,2,...).$$

Решая задачу (22), (23) находим:

$$u_k(t) = \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_k + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_k + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau, \tag{24}$$

где

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2ch(\lambda_k T)}[sh(\lambda_k(T+t-\tau)) - sh(\lambda_k(T-(t+\tau)))],\ t \in [0,\tau], \\ -\dfrac{sh(\lambda_k(T-(t+\tau))) - sh(\lambda_k(T-(t-\tau)))}{2ch(\lambda_k T)}, \quad t \in [\tau, T]. \end{cases} \tag{25}$$

После подстановки выражений из (24) в (21), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения задачи (1)-(3), (14), получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_k - \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_k + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \tag{26}$$

Теперь, из (14), с учетом (21), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - f(1,t) - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\lambda_k^2 u_k(t)\right\}. \tag{27}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (4) подставим выражение (24) в (27):

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - f(1,t) - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\lambda_k^2\left(\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_k - \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_k + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right)\right\}. \tag{28}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (14) свелось к решению системы (26), (28) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Исходя из определения решения задачи (1)-(3), (14) доказывается следующая

Лемма 3. Если $\{u(x,t), a(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3), (14), то функции

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \qquad (k = 1, 2, ...)$$

удовлетворяют на $[0, T]$ системе (24).

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a) = \{\Phi_1(u,a), \Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t)\sin\lambda_k x\,, \tag{29}$$

$$\Phi_2(u,a) = \tilde{a}(t)\,, \tag{30}$$

а $\tilde{u}_k(t)$ $(k = 1, 2, ...)$ и $\tilde{a}(t)$ равны, соответственно, правым частям (24) и (28).

Нетрудно видеть, что

$$\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)} < 2, \quad \frac{sh(\lambda_k t)}{ch(\lambda_k T)} < 1\,, \frac{sh(\lambda_k(T+t-\tau))}{ch(\lambda_k T)} < 1 \quad (t \in [0,\tau]),$$

$$\frac{sh(\lambda_k(T-(t+\tau))}{ch(\lambda_k T)} < 1, \; \frac{sh(\lambda_k(T-(t-\tau))}{ch(\lambda_k T)} < 1 \quad (t \in [\tau, T]). \tag{31}$$

Учитывая эти соотношения имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \le 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2\right)^{1/2} +$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 |\psi_k|)^2\right)^{1/2} + 2\sqrt{T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2\right)^{1/2} +$$

$$+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}, \tag{32}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{\|h''(t) - f(1,t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2\right)^{1/2} +\right.\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 |\psi_k|)^2\right)^{1/2} + 4\sqrt{T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+4T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\Bigg]\Bigg\}. \tag{33}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (14) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^2[0,1], \varphi^{(3)}(x)\in L_2(0,1), \varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=0$.
2. $\psi(x)\in C^1[0,1], \psi^{(2)}(x)\in L_2(0,1), \psi(0)=\psi'(1)=0$.
3. $f(x,t), f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$,
$f(0,t)=f_x'(1,t)=0 \quad (0\le t\le T)$.
4. $h(t)\in C^2[0,T], h(t)\ne 0$ при $t\in[0,T]$.

Тогда, из (32) и (33), соответственно, получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\le A_1(T)+8T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{34}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le B_1(T)+B_2(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{35}$$

где

$$A_1(T)=4\|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)}+2\|\psi^{(2)}(x)\|_{L_2(0,1)}+8\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\Bigg\{\|h''(t)-f(1,t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\Big[2\|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\|\psi^{(2)}(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+4\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\Big]\Bigg\},$$

$$B_2(T)=4\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}.$$

Из неравенств (34), (35) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{36}$$

где

$$A(T)=A_1(T)+B_1(T),\ B(T)=8+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть выполнены условия1-4 и

$$(A(T)+2)^2B(T)T<1. \tag{37}$$

Тогда задача (1)-(3), (14) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^3}\le R=A(T)+2)$ пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \tag{38}$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i=1,2)$, оператора $\Phi(u,a)$, определены правыми частями уравнений (24) и (28).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K=K_R$ из E_T^3. Аналогично (36) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3}\le A(T)+B(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{39}$$

$$\|\Phi z_1-\Phi z_s\|_{E_T^3}\le B(T)TR(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]}+\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}. \tag{40}$$

Тогда из оценок (39) и (40), с учетом (37), следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является решением уравнения (38).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, имеет непрерывные производные $u(x,t),u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Из (22) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\le\sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\right\}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (14) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (14), причем, в силу леммы 3, оно единственное. Теорема доказана.

С помощью леммы 2 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1,

$$\frac{1}{2}(A(T)+1)T^2<1$$

и выполнены условия согласования

$$\varphi(1)=h(0),\ \psi(1)=h'(T).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_{T,T}^3}\le A(T)+2)$ из E_T^3 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
2. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.

İKİTƏRTİBLİ ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli elliptik tənlik üçün bir tərs sərhəd məsələsi tədqiq edilir. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə ekvivalentlikdən istifadə edərək ilk qoyulmuş məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat edilir.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, elliptik tənlik, Furye üsulu, klassik həll.

INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

Y.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In this work, an inverse problem for the elliptic equation of the second order with periodical boundary conditions is investigated. For this reason, first the initial problem reduces to the equivalent problem for which the theorem of existence and uniqueness proves. Then using these facts, the existence and the uniqueness of the classical solution of the initial problem are proved.

Key words: inverse boundary problem, elliptic equation, Fourier method, classic solution.

Поступила в редакцию: 05.03.2011 г.
Принято к печати: 17.06.2011 г.